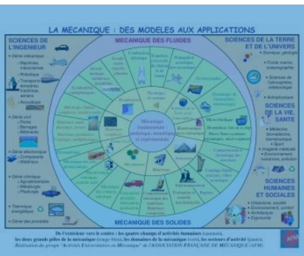


Mécanique

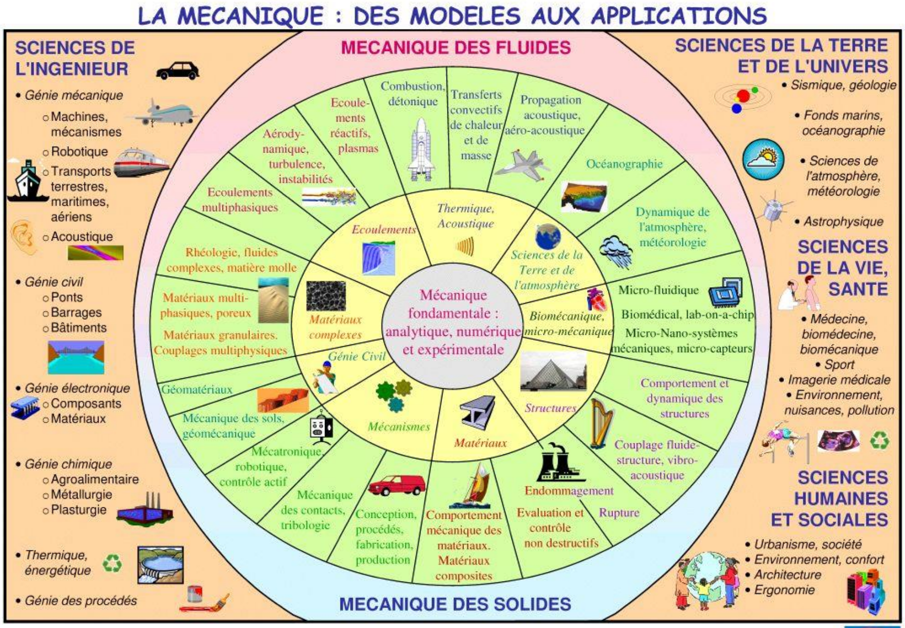
Matériaux et Structures : Dimensionnement

Expliquer des éléments d'une modélisation proposée relative au comportement de tout ou partie d'un système

Terminale STI2D
COURS

- **J'ai de la force,**
- **Tu as de la force,**
- **Il a de la force……………………..**

Non, ceci n'est pas un cours de Français mais bien un rappel des éléments de mécanique



De l'extérieur vers le centre : les quatre champs d'activités humaines (saumon), les deux grands pôles de la mécanique (rouge-bleu), les domaines de la mécanique (vert), les secteurs d'activité (jaune).
Réalisation du groupe "Activités Universitaires en Mécanique" de l'ASSOCIATION FRANÇAISE DE MÉCANIQUE (AFM)

Cette branche des sciences physiques est utilisée pour étudier les forces agissant sur les différents systèmes (ou corps) et leurs conséquences sur ces systèmes (ou corps).

Pour cela, la mécanique des solides s'intéresse à plusieurs volets du comportement des systèmes :

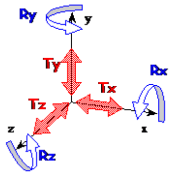
- **la statique : étude de l'équilibre des systèmes,**
- **la cinématique : étude des mouvements des systèmes (vitesse et accélération),**
- **la dynamique : étude du mouvement des systèmes sous l'action des forces qui lui sont appliquées,**
- **la résistance des matériaux : étude de la déformation et de la résistance des systèmes soumis à des actions mécaniques.**

Toutes les applications de la mécanique nécessitent de mettre en place un « modèle » de comportement des structures étudiées quel que soit le domaine par exemple, ouvrages d'art en génie civil, machines, mécanismes, transports en génie mécanique.

Malgré les grandes différences technologiques sur tous ces systèmes, les règles de la « mécanique » au sens des sciences physiques restent les mêmes.

1 Première partie : Modélisation des liaisons

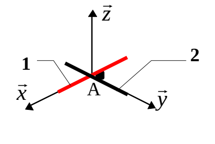
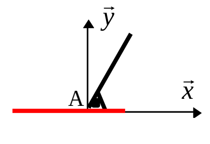
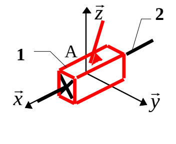
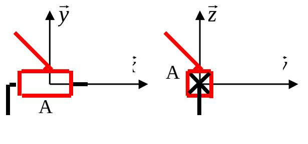
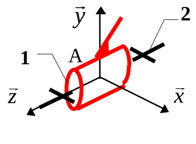
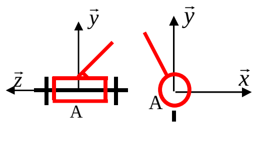
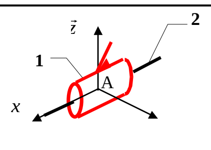
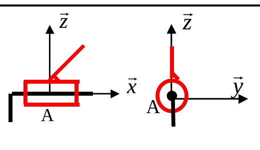
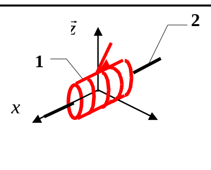
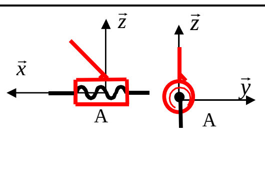
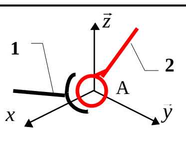
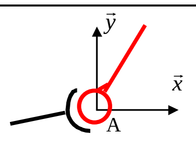
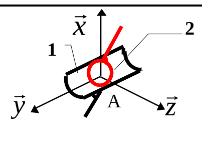
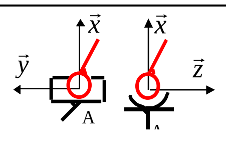
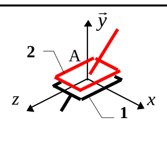
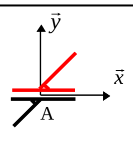
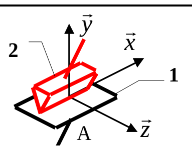
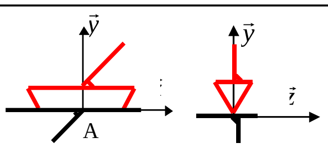
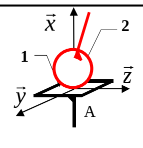
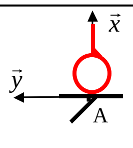
1.1 Degrés de liberté d'un solide



Un solide libre dans l'espace possède **6 degrés de liberté** (ou **mobilités)** :
- **3 translations**
- **3 rotations**

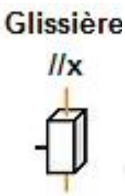
Ces 6 degrés de liberté permettent au solide d'occuper n'importe quelle position dans l'espace.

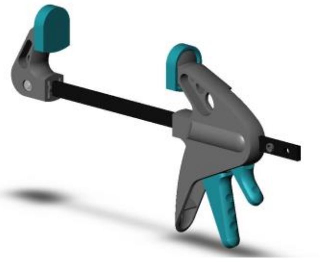
Si ce solide est une pièce d'un **système mécanique** (ex : aiguille d'une montre, roue d'une voiture, contact mobile d'un disjoncteur…) le nombre de ses degrés de liberté sera limité par les **liaisons** qu'il entretient avec les autres pièces du système.

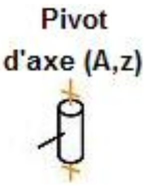
Nature de la liaison et position par rapport au repère	**Schématisation spatiale**	Schématisation plane	**Mouvements possibles dans le repère donné**
Encastrement			0 0 0 0 0 0
Glissière d'axe (A, $\vec{x}$)			Tx 0 0 0 0 0
Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)			0 0 0 0 0 Rz
Pivot glissant d'axe (A, $\vec{x}$)			Tx Rx 0 0 0 0
Hélicoïdale d'axe (A, $\vec{x}$)			combinés Tx Rx 0 0 0 0
Rotule de centre A			0 Rx 0 Ry 0 Rz
Linéaire annulaire de centre A et d'axe (A, $\vec{y}$)			0 Rx Ty Ry 0 Rz
Appui plan de normale (A, $\vec{y}$)			Tx 0 0 Ry Tz 0
Linéaire rectiligne de normale (A, $\vec{y}$) et de droite de contact (A, $\vec{x}$)			Tx Rx 0 Ry Tz 0
Ponctuelle de normale (A, $\vec{x}$)			0 Rx Ty Ry Tz Rz

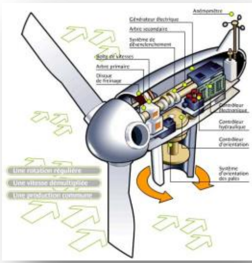
1.2 Modélisation d’un système mécanique ou structure

Pour un mécanisme ou une structure, une fois que l’on connait les mouvements et les efforts relatifs à deux solides, il convient de réaliser cette liaison respectant le cahier des charges.

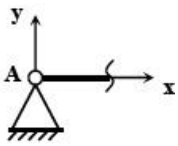




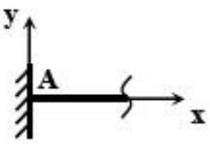


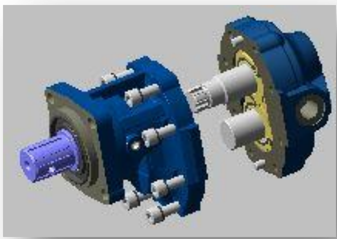


Articulation



Encastrement



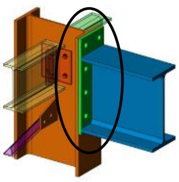


• ***But de la modélisation*** : **la modélisation consiste à représenter un mécanisme de façon simplifiée afin d’étudier son comportement mécanique.**

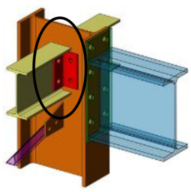
Exemples de modélisation :

<u>En structures métalliques :</u> les différentes liaisons entre les éléments de structure seront modélisées en fonction de leur méthode de réalisation.

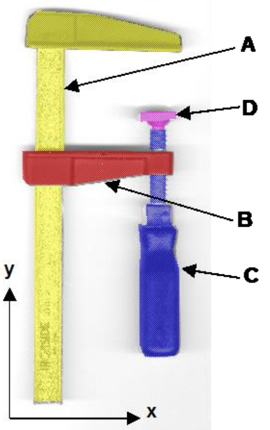
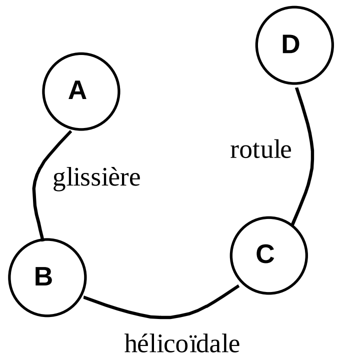
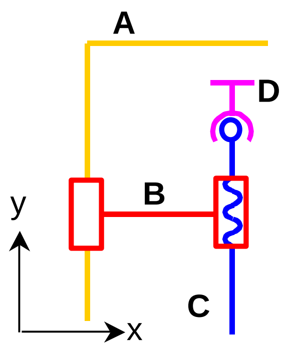
Liaison encastrement



Articulation (liaison pivot)



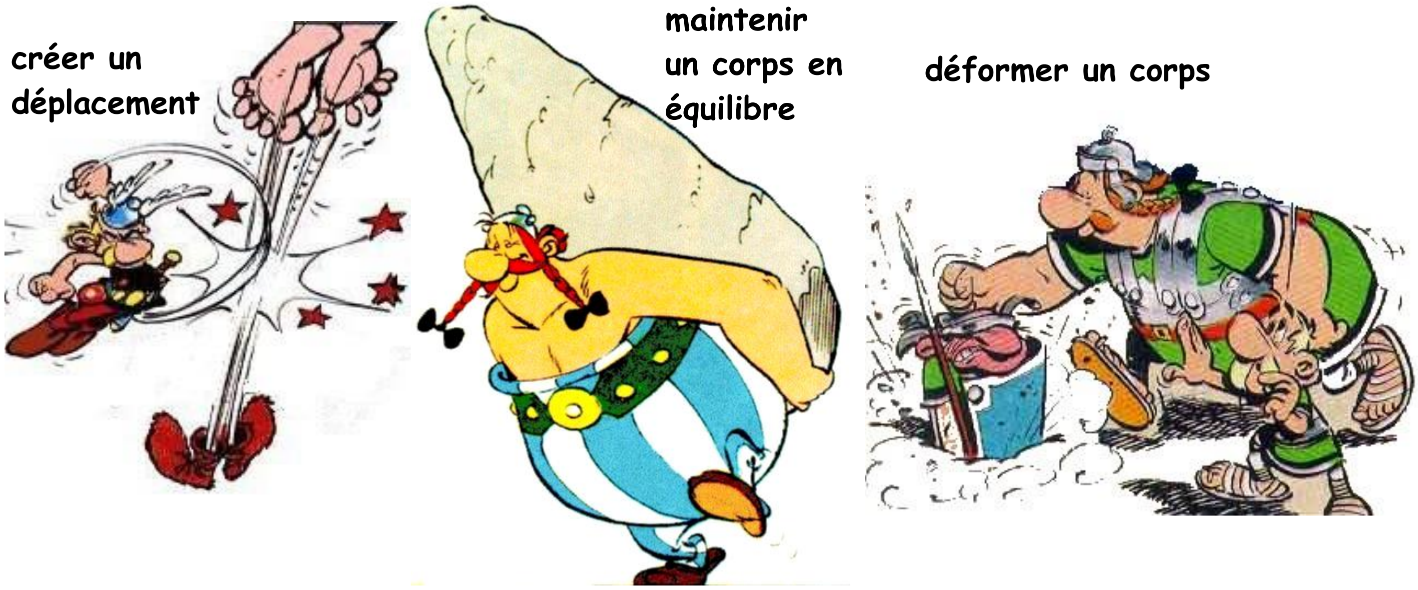
Méthode générale de modélisation des mécanismes :

Etapes	Conseils	Exemple du serre-joint
1°) Repérer quels sont les différents **groupes cinématiques** (ou **sous-ensembles cinématiquement liés** ou encore **classes d'équivalence**).	Repérer les liaisons encastrement puis colorier d'une même couleur toutes le pièces liées entre elles. Lister les pièces composant chacun des groupes : A = { 1, 3, …} B = { 2,5, …}	
2°) Identifier la **nature des liaisons** existant entre les groupes pour réaliser **le graphe des liaisons**.	Pour reconnaître une liaison entre 2 groupes : - observer les **mobilités** possibles entre ces 2 groupes **sans tenir compte des mobilités supprimées par des liaisons avec d'autres groupes**. - identifier **la nature de la surface de contact** entre les 2 groupes	
3°) Etablir le **schéma cinématique** du mécanisme en utilisant la représentation normalisée des liaisons.	Il est inutile de respecter les dimensions. Par contre il faut absolument respecter la **position relative** et l'**orientation** des liaisons.	
4°) Résoudre un problème technique en appliquant les lois de la mécanique.	ça c'est pour plus tard …	Ex : connaissant l'effort de serrage exercé par le patin « D » sur la pièce à serrer, on désire connaître l'effort exercé par le coulisseau « B » sur le mors fixe « A ».

2 Modélisation des actions mécaniques

2.1 Définition d'une Action Mécanique (A.M.)

Une A.M. est un phénomène physique capable de :



On distingue :

- Les A.M. **de contact** ou **surfaciques**, exercées par un solide sur un autre solide par l'intermédiaire de leur surface de contact.

- Les A.M. **à distance** ou **volumique**, qui s'exercent sur tous les éléments de volume du solide sans qu'il y ait besoin de contact (ex : action de la pesanteur, forces magnétiques).

<u>Remarque importante</u> :

Si un système 1 exerce sur un système 2 une A.M., alors le système 2 exerce sur le système 1 une A.M. exactement opposée.

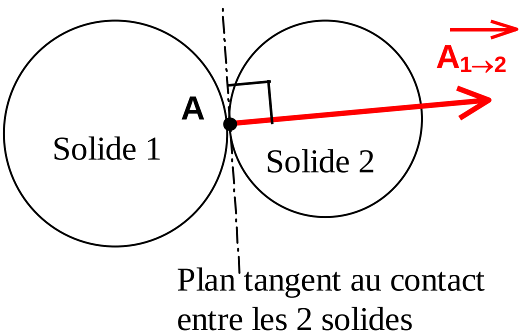
C'est ce que l'on appelle le **principe de réciprocité** ou des **actions mutuelles.**

<u>Ex</u> : une balle de tennis exerce sur la raquette une A.M. exactement opposée à celle qu'exerce la raquette sur la balle de tennis.

2.2 Une A.M. particulière : la Force

2.2.1 Définition

Une **force** est l'action qu'exerce un solide sur un autre solide lorsqu'ils sont **en liaison ponctuelle**.



2.2.2 Caractéristiques

La force est définie par :

- un <u>point d'application</u> : le point de contact entre les 2 solides (ici le point A)
- une <u>direction</u> : normale (=perpendiculaire) au plan tangent au contact.
- un <u>sens</u> : du solide 1 vers le solide 2 s'il s'agit de l'A.M. de 1 sur 2.
- une <u>intensité</u> exprimée en Newton (N)

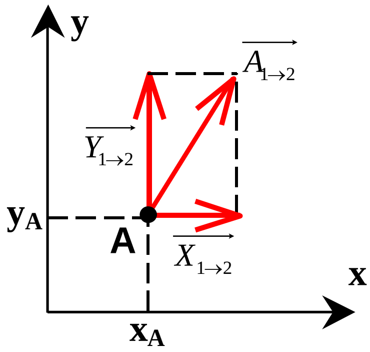
2.2.3 Modèle mathématique

Le modèle mathématique de la force est le **vecteur lié** ou **pointeur**, c'est à dire un vecteur auquel on associe un **point origine**.

Pour la force exercée en A par le solide 1 sur le solide 2, on utilisera la notation suivante :

$$\vec{A}_{1\to2}$$

dont les propriétés algébrique sont les suivantes :



	Coordonnées du point d'application (en mm ou en m)	Composantes algébriques du vecteur (en N)	Norme du vecteur = intensité de la force (en N)
En 2D	$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2}\begin{pmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \end{pmatrix}$	$\left\lVert \vec{A}_{1\to2} \right\rVert = \sqrt{X_{1\to2}^{\ 2} + Y_{1\to2}^{\ 2}}$
En 3D	$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2}\begin{pmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \\ Z_{1\to2} \end{pmatrix}$	$\left\lVert \vec{A}_{1\to2} \right\rVert = \sqrt{X_{1\to2}^{\ 2} + Y_{1\to2}^{\ 2} + Z_{1\to2}^{\ 2}}$ notation simplifiée : $A_{1/2}$

2.3 Actions Mécaniques (A.M.) assimilables à des forces

2.3.1 Le poids d'un solide

La **pesanteur** ou **attraction terrestre** agit sur chaque petit élément constituant un solide (A.M. à distance ou volumique).

La somme de ces petites actions mécaniques élémentaires est équivalente à une **force** dont les caractéristiques sont les suivantes :

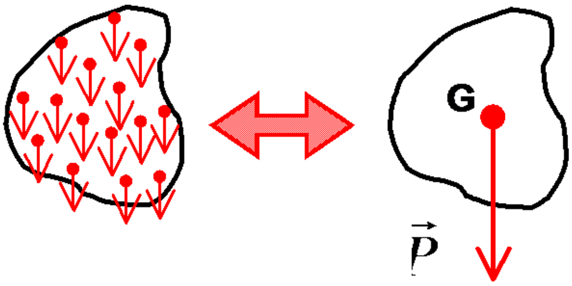
→ <u>point d'application</u> : **G, centre de gravité** du solide
→ <u>direction</u> : **Verticale**
→ <u>sens</u> : **Vers le bas**
→ <u>intensité</u> : $P = m \times g$ en Newton (N)

m : masse du solide en Kg

g : accélération de la pesanteur en m.s^{-2}

$g = 9{,}81 m.s^{-2}$ mais on prendra $g = 10\, m.s^{-2}$ (2% d'erreur)

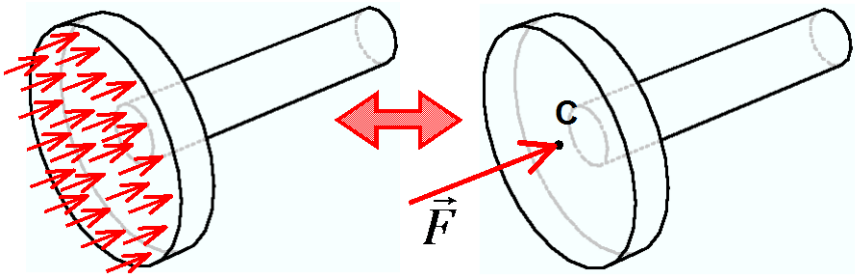
Cette force notée $\vec{P}$ s'appelle le <u>poids</u> du solide :



2.3.2 Les forces de pression

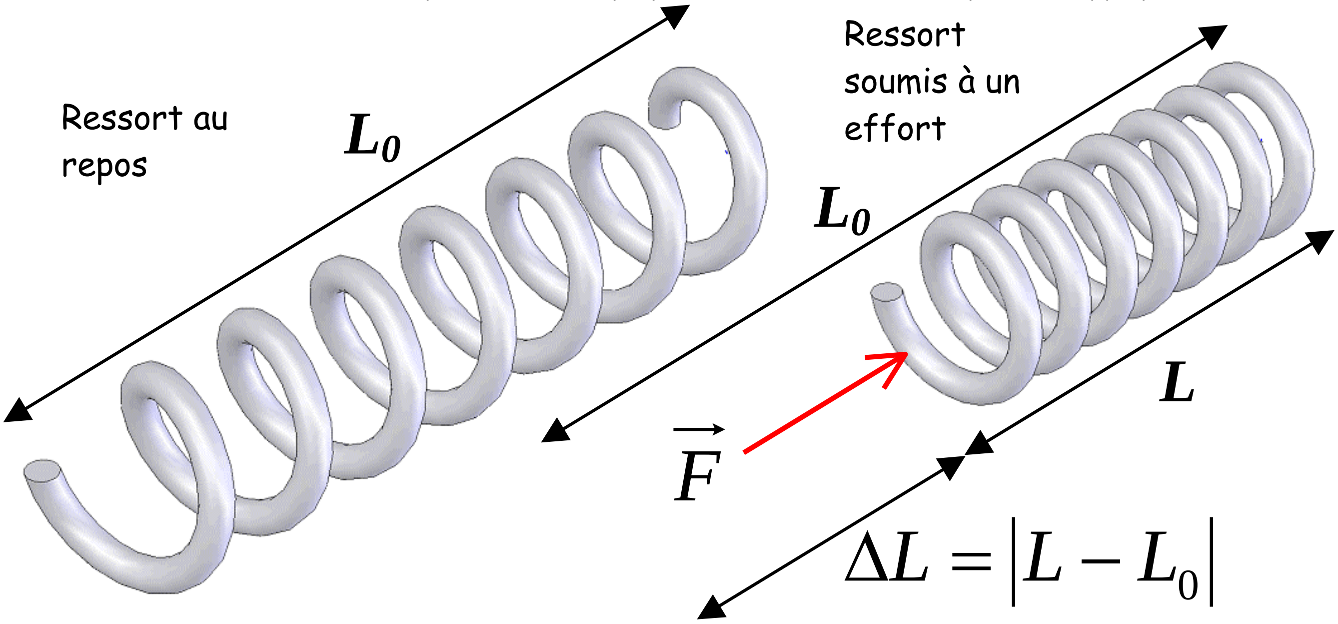
Un fluide sous pression (air, huile, …) en contact avec un solide exerce sur chaque élément de surface du solide une action mécanique élémentaire (A.M. de contact ou surfacique).
La somme de toutes ces A.M. élémentaires est équivalente à une **force** dont voici les propriétés :

→ <u>point d'application</u> : **C, centre géométrique** de la surface en contact avec le fluide
→ <u>direction</u> : **normale** (perpendiculaire) à la surface
→ <u>sens</u> : du fluide vers la surface
→ <u>intensité</u> : $F = p \times S$ en Newton (N)
p : pression du fluide en Pa (Pascal) ; 1 Pa = 1 N/m²
S : surface de contact en m²



2.3.3 Force exercée par un ressort hélicoïdal

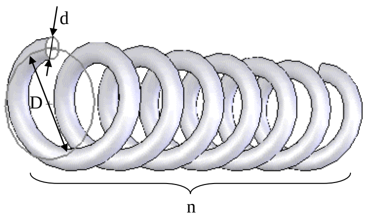
Un ressort hélicoïdal se comprime ou s'étire proportionnellement à l'effort qui lui est appliqué.



La force appliquée sur le ressort a les propriétés suivantes :

→ <u>point d'application</u> : extrêmité du ressort
→ <u>direction</u> : le long de l'axe du ressort
→ <u>sens</u> : dépend du sens de déformation du ressort (compression ou extension)
→ <u>intensité</u> : $F = k \times \Delta L$ en Newton (N)
k : **raideur** du ressort en N/mm
$\Delta L = |L - L_0|$: **flèche** (déformation du ressort) en mm

<u>Remarque</u> : la raideur d'un ressort dépend du **matériau** qui le compose (généralement de l'acier spécial dit "acier à ressort").
Les autres caractéristiques d'un ressort hélicoïdal qui font varier sa raideur sont :
D : diamètre d'enroulement du ressort (k diminue si D augmente)
d : diamètre du fil du ressort (k augmente si d augmente)
n : nombre de spires du ressort (k diminue si n augmente)

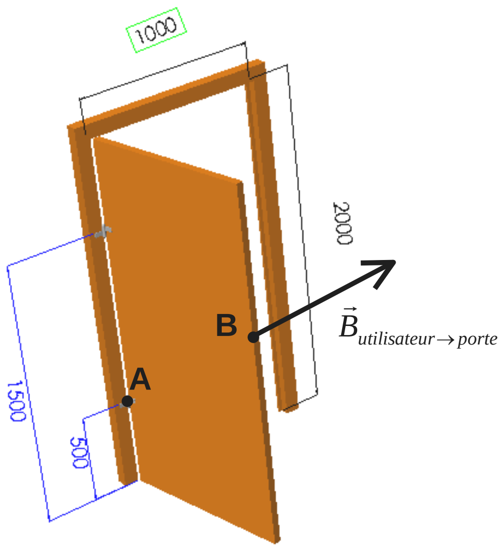


2.4 Moment d'une force par rapport à un point

2.4.1 Signification physique du moment d'une force

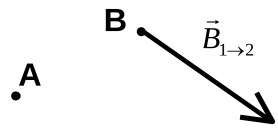
Le **moment** d'une force par rapport à un point est un outil qui permet de mesurer la capacité de cette force à créer un mouvement rotation autour de ce point.

<u>Ex</u> : le moment de la force de l'utilisateur par rapport au point A est sa capacité à faire tourner la porte autour du point A :



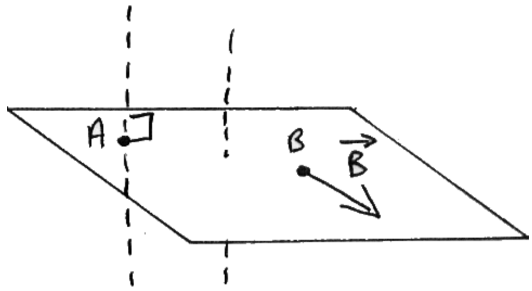
2.4.2 Modèle mathématique du moment d'une force

On considère une force appliquée en un point B et un point A quelconque.



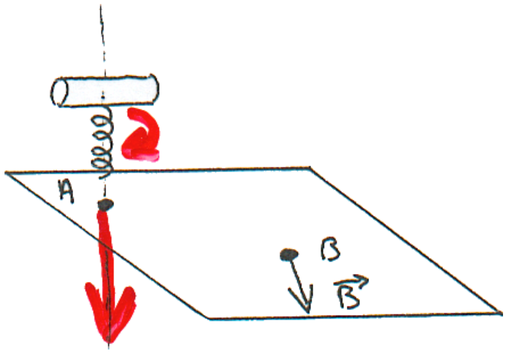
Le **moment** de $\vec{B}_{1\to2}$ par rapport au point A est un **vecteur** noté $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right)$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

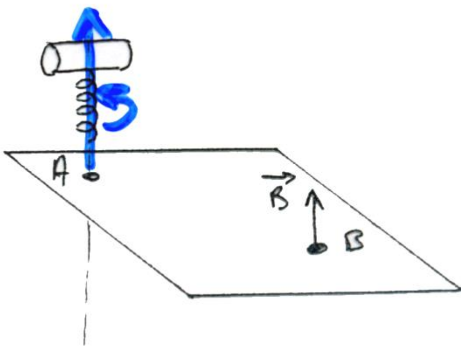
→ <u>**direction**</u> : perpendiculaire au plan contenant le point A et la force $\vec{B}_{1\to2}$:



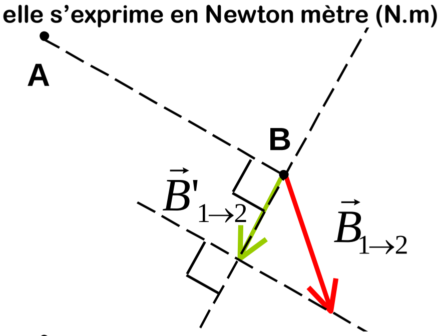
→ <u>**sens**</u> :

on applique la ***règle du « tire-bouchon »*** en considérant que $\vec{B}_{1\to2}$ fait tourner le tire-bouchon autour de A. :

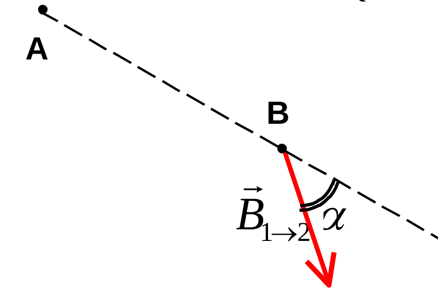




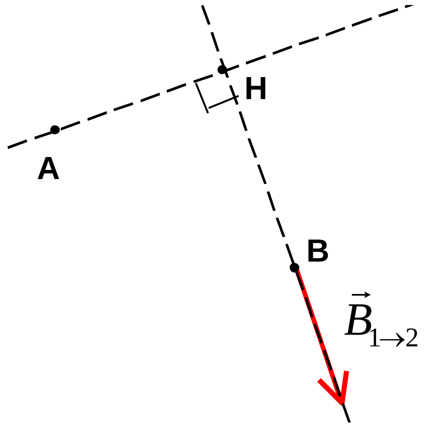
→ **intensité** : elle s'exprime en Newton mètre (N.m) et on a 3 façons équivalentes de la déterminer :



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AB \, . \, B'_{1\to2}}$$



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AB \, . \, B_{1\to2} \, . \sin\alpha}$$



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AH \, . \, B_{1\to2}}$$

2.5 Modélisation d'une force par un torseur

Nous avons vu qu'une **force** était complètement définie par :

- un **point d'application** (<u>ex</u> : B)

- un **vecteur** (<u>ex</u> : $\vec{B}_{1\to2}$)

Elle peut être aussi complètement définie par :

- un **vecteur** (<u>ex</u> : $\vec{B}_{1\to2}$)

- son **moment** par rapport à un point quelconque (<u>ex</u> : $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right)$)

On peut alors modéliser la force à l'aide d'un **torseur** :

torseur de la force de 1 sur 2

vecteur force

coordonnées du vecteur force (en N)

base dans laquelle sont exprimées les coordonnées des vecteurs

$$\left\{\tau_{1\to2}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{B}_{1\to2} \\ \vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{1\to2} & L_{A\,1\to2} \\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2} \\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

point de réduction du torseur

moment de la force par rapport au point de réduction du torseur

coordonnées du vecteur moment (en N.m)

2.6 Modélisation d'une A.M. quelconque par un torseur

Toute action mécanique (force ou autre) exercée sur un système S par une entité E extérieure à S peut être modélisée par un torseur :

$$\{\tau_{E\to S}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_{A}\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

$\vec{R}_{E\to S}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est la **résultante** de l'A.M. de E sur S

$\vec{M}_A(E\to S)\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}$ est le **moment résultant** au point A de l'A.M. de E sur S

<u>Remarques</u> :

❶ Un même torseur peut s'écrire en n'importe quel point :

$$\{\tau_{E\to S}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_B(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_{\dots}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_{\dots}(E\to S) \end{Bmatrix}$$

son expression varie mais il modélise toujours la même A.M.

❷ La résultante d'un torseur est **invariante** (ne change pas) quel que soit le point auquel on exprime le torseur.

$\vec{R}_{E\to S} = cste$

❹ Le Principe des actions réciproques stipule que l'A.M. d'un système E sur un système S est exactement opposée à l'A.M. de S sur E :

$$\{\tau_{E\to S}\} = -\{\tau_{S\to E}\}$$

$${}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_{A}\begin{Bmatrix} -\vec{R}_{S\to E} \\ -\vec{M}_A(S\to E) \end{Bmatrix}$$

$${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{E\to S} & L_A(E\to S) \\ Y_{E\to S} & M_A(E\to S) \\ Z_{E\to S} & N_A(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_{A}\begin{Bmatrix} -X_{S\to E} & -L_A(S\to E) \\ -Y_{S\to E} & -M_A(S\to E) \\ -Z_{S\to E} & -N_A(S\to E) \end{Bmatrix}$$

2.7 A.M. transmissibles par les liaisons usuelles

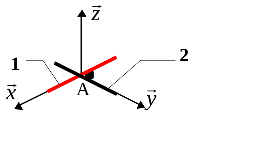
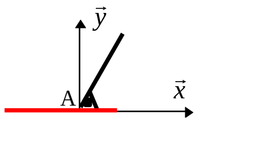
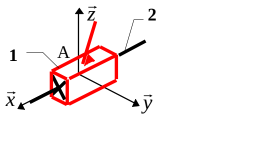
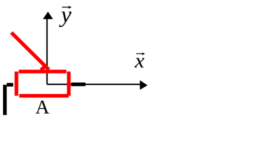
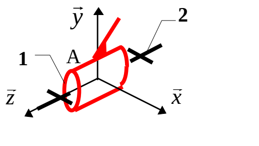
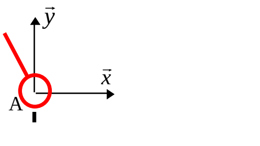
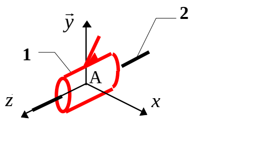
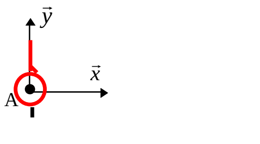
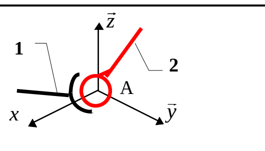
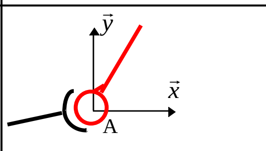
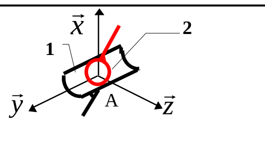
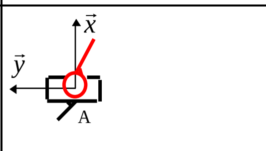
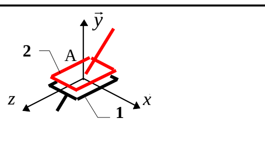
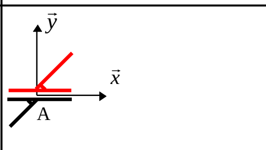
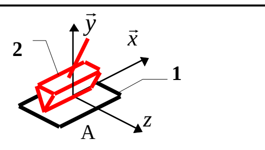
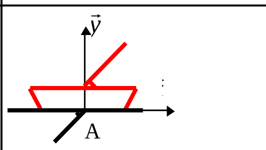
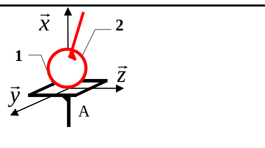
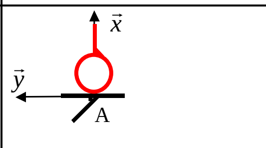
2.8 Cas des liaisons parfaites

On dit que des liaisons sont « parfaites » si on considère qu'il n'y pas de frottement, c'est à dire que les déplacements autorisés par la liaison se font sans aucune résistance.

Lorsque 2 pièces (ou groupes cinématiques) sont liées par une liaison usuelle parfaite, la forme de l'A.M. qu'elles peuvent exercer l'une sur l'autre dépend de la nature de la liaison (voir tableau).

Si la liaison permet un mouvement de translation suivant une direction, aucune résultante ne peut alors être transmise suivant cette direction.

Si la liaison permet un mouvement de rotation autour d'un axe, aucun moment ne peut alors être transmis selon cet axe.

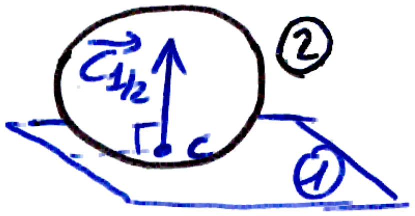
Nature de la liaison et position par rapport au repère	**Schématisation spatiale**	**Schématisation plane**	**Mouvements possibles**	**Torseur transmissible** $\{\tau_{1\to2}\}$ **au point A**
Encastrement R quelconque			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Glissière d'axe (A, $\vec{x}$)			$\begin{Bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant d'axe (A, $\vec{z}$)			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Tz & Rz \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule de centre A			$\begin{Bmatrix} 0 & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire de centre A et d'axe (A, $\vec{y}$)			$\begin{Bmatrix} 0 & Rx \\ Ty & Ry \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale (A, $\vec{y}$)			$\begin{Bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne de normale (A, $\vec{y}$) et de droite de contact (A, $\vec{x}$)			$\begin{Bmatrix} Tx & Rx \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Ponctuelle de normale (A, $\vec{x}$)			$\begin{Bmatrix} 0 & Rx \\ Ty & Ry \\ Tz & Rz \end{Bmatrix}$	$_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

2.9 Cas des contacts avec frottements

Jusqu'à présent nous avons considéré les liaisons comme parfaites, c'est à dire sans efforts dus au frottement. Dans la réalité, les frottements vont créer des efforts supplémentaires qui s'opposent aux déplacements.

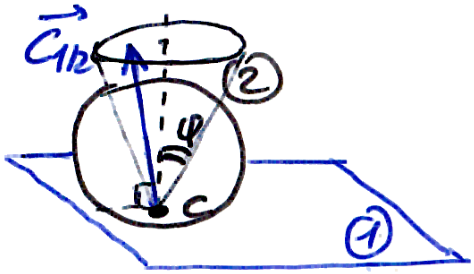
<u>ex : contact ponctuel</u>

Sans frottement



$\vec{C}_{1\to2}$ **est normale à la surface de contact.**

Avec frottement

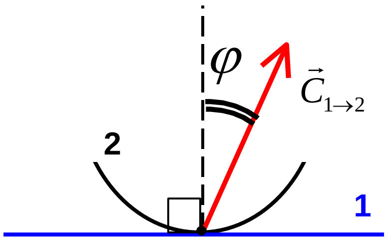


$\vec{C}_{1\to2}$ **est comprise dans un cône de demi-angle au sommet** φ **par rapport à la normale au contact.**

Le **coefficient de frottement** $f = \tan\varphi$ **dépend essentiellement du couple de matériaux en contact.**

Tant que $\vec{C}_{1\to2}$ **est à l'intérieur du cône de frottement d'angle** φ **, il n'y a pas glissement possible entre les solides 1 et 2 (on dit qu'il y a adhérence).**

Lorsqu'il y a glissement entre 1 et 2, $\vec{C}_{1\to2}$ **se trouve en limite du cône d'adhérence et fait donc un angle** φ **avec la normale au contact :**



2.10 Principe fondamental de la statique

Si un système matériel S est en équilibre dans un repère galiléen, **alors** le torseur des A.M. extérieures est égal au torseur nul :

$$\boxed{\{T_{ext \to S}\} = \{\vec{0}\}}$$

Ce qui se traduit par 2 théorèmes :

→ Théorème de la résultante statique :
Si le système est en équilibre alors la somme des résultantes des A.M. extérieures est nulle.

→ Théorème du moment statique :
Si le système est en équilibre alors la somme des moments des A.M. extérieures par rapport à un même point est nulle.

Remarques :

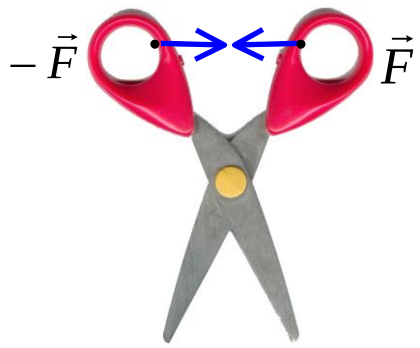
❶ L'application du P.F.S. fournit 6 équations :

théorème de la résultante statique : $\begin{cases} \sum R_X = 0 \\ \sum R_Y = 0 \\ \sum R_Z = 0 \end{cases}$

théorème du moment statique : $\begin{cases} \sum M_X = 0 \\ \sum M_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{cases}$

❷ ***Attention !***
Si le torseur des A.M. extérieures à un système est nul, le système n'est pas forcément en équilibre.

Ex : une paire de ciseaux
Si l'utilisateur exerce 2 forces opposées sur les ciseaux, le torseur des A.M. extérieures aux ciseaux est nul, mais le système n'est pas en équilibre (les ciseaux vont se fermer)



2.11 Cas d'un système soumis à 2 ou 3 forces

2.11.1 Système soumis à 2 forces

Soit un système S en équilibre sous l'action de 2 forces $\vec{A}_{ext \to S}$ et $\vec{B}_{ext \to S}$ appliquées en **A** et en **B**.
L'application du P.F.S. se traduit par :

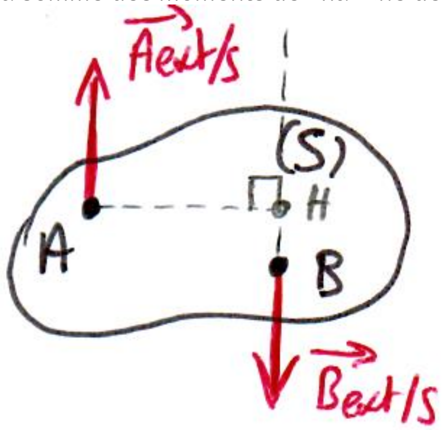
→ <u>Le théorème de la résultante statique</u> :

$$\vec{A}_{ext \to S} + \vec{B}_{ext \to S} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{A}_{ext \to S} = -\vec{B}_{ext \to S}$$

<u>Conclusion</u> : Les 2 forces sont **opposées** (même norme, même direction, sens contraire)

→ <u>Le théorème du moment statique</u> :
La somme des moments de chacune de ces forces par rapport à un point quelconque est nulle.

<u>ex</u> :



On doit avoir :

$$\vec{M}_A\left(\vec{A}_{ext \to S}\right) + \vec{M}_A\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$$

or $\vec{M}_A\left(\vec{A}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$ car A est le point d'application de la force

donc $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$

or $M_A\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = AH \times B_{ext \to S}$

comme $B_{ext \to S} \neq 0$ alors $\boxed{AH = 0}$

<u>Conclusion</u> : Les 2 forces ont **même droite d'action**.

<u>En résumé</u> : Si un système est en équilibre sous l'action de 2 forces alors ces 2 forces sont **opposées** et ont **même droite d'action**.

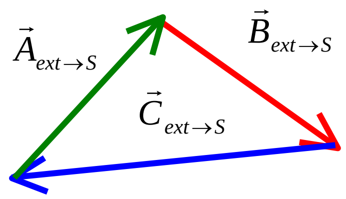
2.11.2 Système soumis à 3 forces

Soit un système S en équilibre sous l'action de 3 forces quelconques $\vec{A}_{ext \to S}$, $\vec{B}_{ext \to S}$ et $\vec{C}_{ext \to S}$ appliquées aux points **A**, **B** et **C**.
Le P.F.S. se traduit alors par :

→ <u>Le théorème de la résultante statique</u> :

$$\vec{A}_{ext \to S} + \vec{B}_{ext \to S} + \vec{C}_{ext \to S} = \vec{0}$$

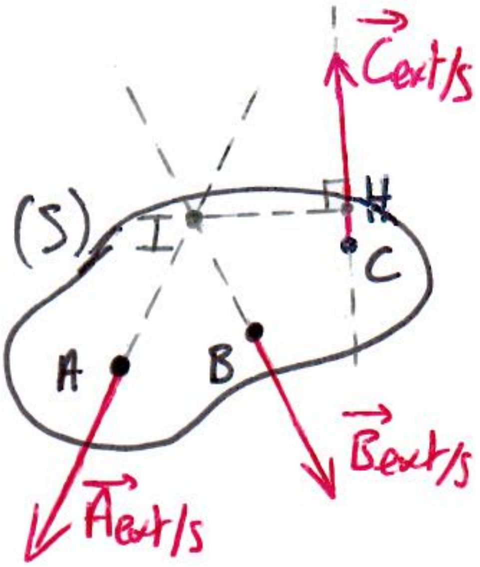
Ceci se traduit graphiquement par le fait que le triangle formé par les 3 vecteurs mis bout à bout est fermé et donc que les 3 vecteurs sont contenus dans un même plan.



<u>Conclusion</u> : La **somme** ***<u>vectorielle</u>*** des 3 vecteurs force est **nulle** et ces 3 vecteurs sont donc **coplanaires**.

→ <u>Le théorème du moment statique</u> :
La somme des moments de chacune des 3 forces par rapport à un point quelconque est nulle.

ex :



Soit I le point d'intersection des droites d'action de $\vec{A}_{ext\to S}$ et $\vec{B}_{ext\to S}$

On doit avoir :

$$\vec{M}_I\left(\vec{A}_{ext\to S}\right)+\vec{M}_I\left(\vec{B}_{ext\to S}\right)+\vec{M}_I\left(\vec{C}_{ext\to S}\right)=\vec{0}$$

or $\vec{M}_I\left(\vec{A}_{ext\to S}\right)=\vec{0}$ et $\vec{M}_I\left(\vec{B}_{ext\to S}\right)=\vec{0}$ car I est sur les droites d'action de $\vec{A}_{ext\to S}$ et $\vec{B}_{ext\to S}$

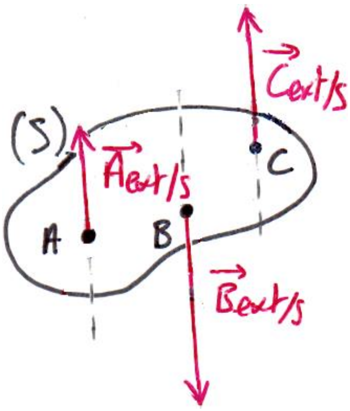
donc $\vec{M}_I\left(\vec{C}_{ext\to S}\right)=\vec{0}$

donc $M_I\left(\vec{C}_{ext\to S}\right)=IH\times C_{ext\to S}=0$

comme $C_{ext\to S}\neq 0$ alors $\boxed{IH=0}$

Conclusion : **Les droites d'action des 3 forces sont concourantes.**

Attention, cas particulier :



Si 2 des 3 forces sont parallèles alors elles ne peuvent pas être concourantes.
Dans ce cas, la 3ème force est forcément parallèle aux 2 autres pour que leur somme vectorielle puisse être nulle.
De plus pour que le théorème du moment statique soit respecté, les 3 forces doivent se trouver dans un même plan.

En résumé :

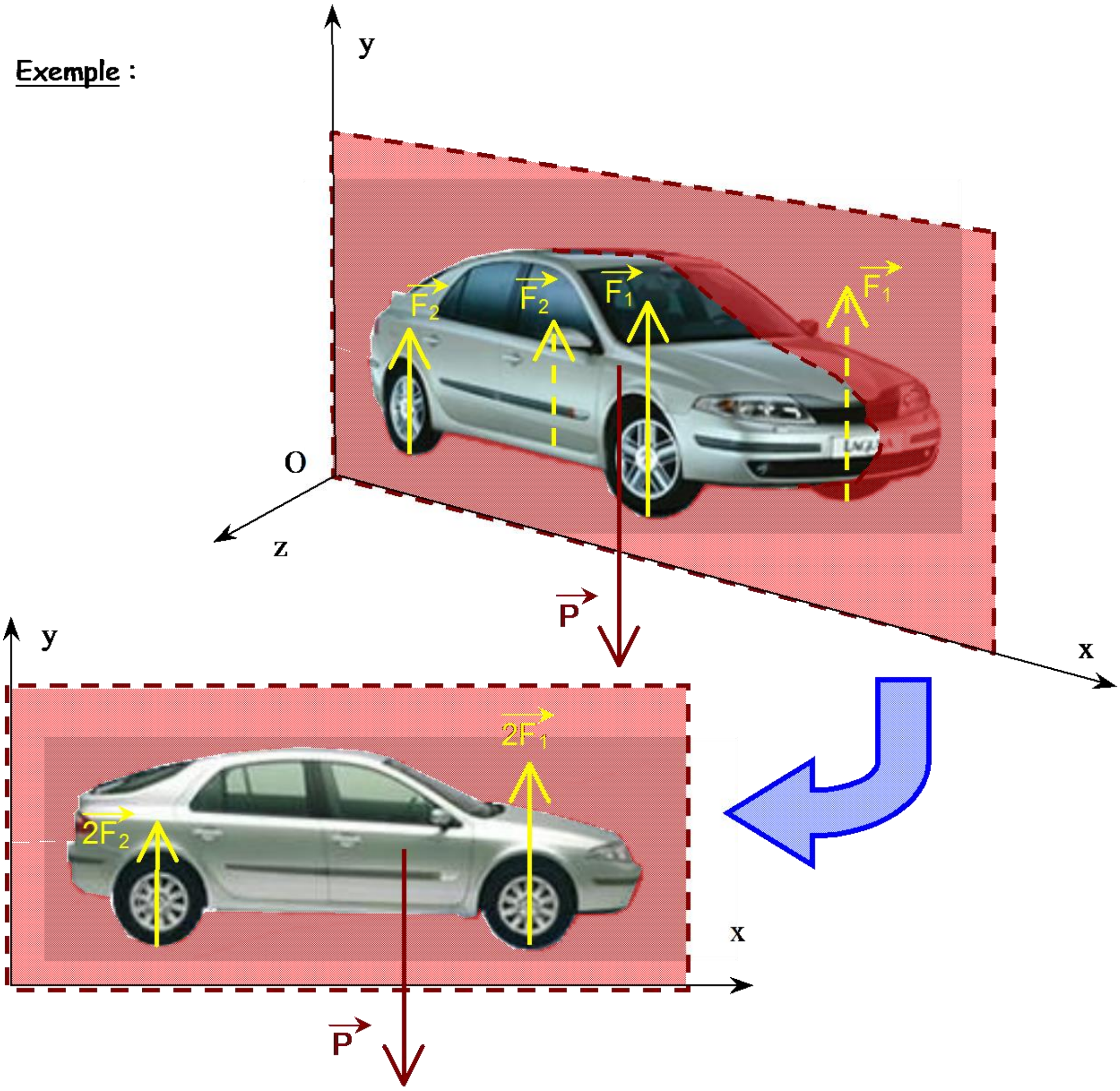
Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces **non parallèles**, alors ces 3 forces sont **concourantes**, **coplanaires** et de **somme vectorielle nulle**.

Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces dont 2 sont **parallèles**, alors ces 3 forces sont **parallèles**, **coplanaires** et de **somme vectorielle nulle**.

2.12 Simplification plane

Si la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un **plan de symétrie** et que les A.M. extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan, alors on peut admettre que le mécanisme est **« plan »**, c'est à dire que :
- les **résultantes** des A.M. extérieures sont contenues **dans le plan de symétrie**
- les **moments** des A.M. extérieures sont **perpendiculaires au plan de symétrie**.

Exemple :



Le plan (O,x,y) est plan de symétrie de la géométrie et des A.M. extérieurs donc toutes les A.M. s'écrivent sous la forme suivante :

$$_A\begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix} \text{ A quelconque}$$

L'application du PFS ne nécessite donc que la résolution de **3 équations** :

$$\begin{cases} \sum R_X = 0 \\ \sum R_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{cases}$$

Pour comprendre le comportement de systèmes soumis à des actions mécaniques nous aurons essentiellement pour objectif de modéliser ces actions mécaniques et de les soumettre à un « solveur » nous permettant de résoudre le P.F.S pour une résolution complexe ou de résoudre par la manière graphique le système de forces (3 forces concourantes).

FIN