La Numération

Table des matières

LA NUMÉRATION

La numération désigne le mode de représentation des nombres, et peut éventuellement se restreindre aux ordinaux ou cardinaux, ou à un ou plusieurs ensembles de nombres donnés. Cette représentation peut être concrète et matérielle, ou, au contraire, abstraite, par le biais des mots, gestes et signes qui ont permis aux différents peuples d'énoncer, de mimer et d'écrire ces nombres.

De façon plus spécifique, la numération peut désigner un mode de représentation des nombres lié à un système d'écriture en chiffres précis. Aujourd'hui la numération occidentale, dite « arabe » ou « *indo*-arabe », à la fois décimale et positionnelle, tend à s'imposer dans le monde.
La numération désigne parfois aussi le comptage ou le dénombrement. Le mot provient d'ailleurs du latin classique, « *numeratio* », ayant pour sens « action de compter de l'argent », lui-même tiré de « *numerus* », signifiant « nombre ».

Une technique ancienne permet de représenter une quantité sans l'intervention de l'écriture ni du langage. En symbolisant chaque élément par un caillou ou un jeton, cela permet d'enregistrer une quantité à l'aide d'une quantité équivalente. De cette manière, par comparaison des quantités, élément par élément, il est possible de déterminer si un troupeau est complet, ou si le nombre de bêtes qu'il comprend accroît, décroît ou reste stable. On parle de collection équipotente.

Ce système a été utilisé dès la Préhistoire sous la forme d'encoches sur des os (et probablement des morceaux de bois). Dans l'Antiquité grecque, on l'utilisait pour dénombrer les soldats (chaque soldat apportait un caillou). Et au XXe siècle dans les mines françaises pour savoir si tout le monde était sorti (par la gestion des lampes). Le terme « calcul » (cailloux) et le mot anglais « digit » (doigt), avec l'anglicisme « digital » (numérique), proviennent de ces pratiques.

On peut caractériser une numération de différentes manières.

- Par le type de nombres représentés :
  - une numération cardinale, ou arithmétique, vise à représenter des quantités, des proportions ou des grandeurs ;
  - une numération ordinale vise à ordonner un ensemble et à identifier chaque élément de cet ensemble par son rang.

- Par la base utilisée :
  - concernant les bases courantes, on parle, par exemple, de numération binaire (ou en base 2), quinaire (ou en base 5), octale (ou en base 8), décimale (ou en base 10), duodécimale (ou en base 12), hexadécimale (ou en base 16), vicésimale (ou en base 20), ou sexagésimale (ou en base 60) ;
  - concernant les bases exotiques, relatives au domaine des sciences, on parle, par exemple, de béta-numération (ou numération en base non entière), comme pour la numération en base d'or, de numération de Zeckendorf (ou en base de Fibonacci), de numération à bases mixtes (comme la numération factorielle) ou de numération en base complexe.

- Par le type de chiffres utilisé :
  - une numération acrophonique emploie des chiffres qui renvoient à l'initiale du mot désignant le nombre auquel ils sont associés ;
  - une numération alphabétique emploie pour chiffres des lettres de l'alphabet.
  - une numération hiéroglyphique emploie pour chiffres des hiéroglyphes.

- Par le mode d'utilisation des chiffres :
  - une numération additive emploie des chiffres qui représentent la même valeur quelle que soit leur place dans le nombre ;
  - une numération de type hybride emploie deux types de chiffres qui peuvent se combiner pour représenter une valeur ;
  - une numération de position emploie des chiffres dont la valeur qu'ils représentent varie en fonction de leur place dans le nombre.

- Par son caractère incomplet ou redondant :
  - une numération incomplète ne permet pas de représenter tous les nombres ;
  - une numération redondante permet de représenter certains nombres de plusieurs manières.

De tout temps, en tous lieux, les hommes ont rivalisé d'imagination et d'ingéniosité pour utiliser les nombres et chiffrer le réel. Les nombres sont nés des cailloux, à l'aube de l'humanité. Au début, simples moyens mnémotechniques pour compter les troupeaux et d'autres biens matériels, ils ont progressivement envahi le monde de la mesure.

Aujourd'hui tout est numérique : informatique, musique, télévision, photographie. Tout est régi par les nombres. Dans l'imaginaire moderne, tout problème a son équation et toute équation sa solution. Nous pouvons ainsi calculer des constantes célèbres comme ? avec plusieurs milliards de décimales!

Pourtant deux décimales (3,14) suffisent pour les besoins usuels, une douzaine (3,141592653589) pour les plus sophistiqués.Alors goût de la prouesse ? Espérance de découvertes ?
Les nombres qu'on compte (des abaques antiques aux ordinateurs). Les nombres qui mesurent (longueur, aire, volume, etc.). Les nombres impossibles (tels que la racine de deux). Les nombres symboliques (nombre d'or, numérologie, magie des nombres, etc.). De la découverte des opérations numériques élémentaires aux nombres algébriques en passant par les fractions égyptiennes, L'Univers des nombres propose un voyage érudit et captivant à travers l'Histoire et les Mathématiques.

Compter et calculer :

• dans l'antiquité ○ Numération mésopotamienne ○ Numération grecque ○ Numération romaine
• de nos jours ○ Le système décimal
• avec une machine ○ Le binaire ○ L'octal ○ L'hexadécimal

dans l'antiquité

ANTIQUITÉ

– 20 000 avant J.-C.	**Préhistoire**	Des entailles dans le bois représentent les nombres. L'os d'Ishango (Congo) serait la plus ancienne manifestation mathématique: bâton de comptage ou identification des nombres premiers (5, 7, 11, 13, 17, 19)?
– 4 500	**Sumer (confluence du Tigre et de l'Euphrate)**	Apparition des opérations sur des tablettes d'argile (multiplication et division) en Mésopotamie. **Au vu des objets fabriqués, on suppose que les vieux royaumes de l'Égypte et de l'Indus avaient déjà développé des aptitudes arithmétiques.**
– 4 000	**Antiquité**	Apparition de l'écriture; date conventionnelle du passage de la préhistoire à l'Antiquité (en 3 300 av. J.-C. pour les Mésopotamiens).
– 3 500	**Sumer**	Connaissance des carrés, cubes et même logarithmes. Numération de position en base 60. Les nombres sont basés sur la valeur des chiffres selon leur position. Invention d'un zéro de position, mais ne le considèrent pas comme un chiffre. **Il n'a pas de zéro, ou plutôt c'est l'espace vide au milieu d'un nombre, mais pas possible aux extrémités. On différencie 102 et 12, mais pas 12 et 120.**
– 2 500	**Pyramide**	Construction des pyramides de Khéops, Khéphren et Mykérinos démontrant des aptitudes à la géométrie.
– 1 900 – 1 600	**Babylone**	Tablette de Plimpton 322 découverte en 1945 par O. Neugebauer & A. Sachs. Invention probable du boulier. Ils donnent la valeur de V2, sans révéler la manière de l'obtenir. Triplets de Pythagore, 1000 ans avant Pythagore. $a^2 + b^2 = c^2$ $3^2 + 4^2 = 5^2$ $65^2 + 72^2 = 97^2$ $12\,709^2 + 13\,500^2 = 18\,541^2$ Triplets ordonnés par angle décroissant de 45° à 31°.
– 2 000	**Papyrus de Moscou**	Il contient 25 problèmes avec solutions comme le calcul de la surface d'une demi-sphère ou du volume d'une pyramide tronquée.
– 1 250	**Grecs**	Les Grecs ***vont faire*** la Une. Ils introduisent les outils que nous connaissons aujourd'hui: ***Déduction, preuves, théorèmes, abstraction.*** Les Grecs utilisent le boulier, première machine à calculer vers ***-500***
– 1 200	**Alphabet**	Phénicien (Liban actuel).
– 1 200	**Chine**	Premier système décimal de position connu.
– 1 200	**Inde**	Mantras védiques: énonce les puissances de 10 jusqu'à 10^{12}.
– 970 – 931	**Salomon**	Fils et successeur du roi David, roi d'Israël Réputé pour sa sagesse.

– 800	**Grèce**	Naissance des cités grecques.
– 800	**Yajnavalkya**	Meilleure approximation de Pi à cette époque.
– 800 **– 740**	**Baudhayana**	Mathématicien indien: traité d'algèbre et de géométrie. Calculs pour la construction d'autels. Plusieurs approximations de Pi et de racine de 2.
– 750	**Social**	Démocratie athénienne.
– 750 **– 690**	**Manava Sulbasutra**	Calculs de constructions. Approximation de Pi et de racine de 2. Nombreux triplets de Pythagore.
– 753	**Rome**	Fondation de Rome.

Numération mésopotamienne

La **numération mésopotamienne** est un système de numération en base soixante utilisé en Mésopotamie dès le III^{e} millénaire av. J.-C.. Ce système y perdure en se perfectionnant, au moins jusqu'au III^{e} siècle av. J.-C., durant l'époque séleucide. Il est repris par les civilisations grecques et arabes pour l'écriture des nombres en astronomie.

Il en reste quelques vestiges dans notre système horaire ou dans la mesure des angles en degrés, minutes, secondes où figurent 60,360 et 3600.

Ce système repose sur un compromis entre la base soixante et la base dix. Au cours de ces 3000 ans, plusieurs systèmes d'écriture ont cohabité dont un système de numération positionnelle savant de base soixante utilisant une notation à base de clous et chevrons et d'autres de principe additionnel affectant des symboles particuliers aux nombres 1, 10, 60, 600, 3 600, 36 000, 216 000. Cette numération est partagée par les Babyloniens et les Akkadiens et provient de celle utilisée par les Sumériens.

À partir du début du II^{e} millénaire av. J.-C., les Mésopotamiens ont compté en base 60 en utilisant une numération de position dérivée du système de numération de type additif et de base mixte des Sumériens. Ce système est généralement associé à la civilisation babylonienne, qui occupe le sud mésopotamien après 1800 et jusqu'au début de notre ère. Cette base a traversé les siècles : on la retrouve aujourd'hui dans la notation des angles en degrés (360° = 6 x 60°) ou dans le découpage du temps (1 heure = 60 minutes = 60^2 secondes).

Le système sexagésimal de position décrit ci-dessous est attesté dès le XXI^{e} siècle av. J.-C. sur une table d'inverses18 et il est très fréquent durant la période paléo-babylonienne (2000 à 1600 av. J.-C.). C'est une notation savante utilisée dans les écoles de scribes et dont l'usage semble réservé au calcul, principalement les multiplications et les divisions19. L'ordre de grandeur n'y est pas spécifié et ces nombres ne sont jamais suivis d'unités de mesure. Les nombres écrits sous cette forme sont pour cela appelés des nombres abstraits20. On retrouve cette notation savante à l'époque Séleucide dans tous les textes astronomiques.

Le principe consiste à disposer de 59 symboles ou « chiffres », permettant de représenter les nombres de 1 à 59, et de les utiliser de droite à gauche pour représenter successivement le nombre d'unités, le nombre de soixantaines, le nombre de *trois-mille-six-centaines*, etc.

Écriture des « chiffres » de 1 à 59

Exceptant le zéro, les Babyloniens employaient cinquante-neuf des soixante « chiffres » du système sexagésimal. Ces chiffres étaient notés à l'aide d'un système additif décimal : un clou 𒁹 pour l'unité et un chevron 𒌋 pour la dizaine. Ainsi, tout chiffre de leur système sexagésimal pouvait s'écrire avec au plus cinq chevrons et neuf clous.

Liste des chiffres cunéiformes babyloniens de 0 à 59.

		unités									
		…0	…1 𒁹	…2 𒈫	…3 𒐈	…4 𒐉	…5 𒐊	…6 𒐋	…7 𒐌	…8 𒐍	…9 𒐎
dizaines	0…		𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒐌	𒐍	𒐎
	1… 𒌋	𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒈫	𒌋𒐈	𒌋𒐉	𒌋𒐊	𒌋𒐋	𒌋𒐌	𒌋𒐍	𒌋𒐎
	2… 𒎙	𒎙	𒎙𒁹	𒎙𒈫	𒎙𒐈	𒎙𒐉	𒎙𒐊	𒎙𒐋	𒎙𒐌	𒎙𒐍	𒎙𒐎
	3… 𒌍	𒌍	𒌍𒁹	𒌍𒈫	𒌍𒐈	𒌍𒐉	𒌍𒐊	𒌍𒐋	𒌍𒐌	𒌍𒐍	𒌍𒐎
	4… 𒐏	𒐏	𒐏𒁹	𒐏𒈫	𒐏𒐈	𒐏𒐉	𒐏𒐊	𒐏𒐋	𒐏𒐌	𒐏𒐍	𒐏𒐎
	5… 𒐐	𒐐	𒐐𒁹	𒐐𒈫	𒐐𒐈	𒐐𒐉	𒐐𒐊	𒐐𒐋	𒐐𒐌	𒐐𒐍	𒐐𒐎

Pour écrire des nombres supérieurs à 59, il suffit de juxtaposer de gauche à droite plusieurs de ces «chiffres».
Ainsi l'écriture du nombre $60^2 + 17 \times 60 + 35$ consiste à aligner les symboles représentant 1, 17, 35 : 𒁹 𒌋𒐌𒌍𒐊

Exemples de nombres écrits en numération babylonienne sexagésimale.

Valeur décimale	Écriture babylonienne cunéiforme	Décomposition en base 60
1	𒁹	1 x 1
17	𒌋𒐌	17 x 1
44	𒐏𒐉	44 x 1
60	𒁹	60 = 1 x 60 + 0 x 1
85	𒁹 𒎙𒐊	1 × 60 + 25 x 1
3600	𒁹	3600 = 1 x 60² + 0 x 60 + 0 x 1
11327	𒐈 𒐍 𒐏𒐌	3 × 60² + 8 × 60 + 47 x 1
7000,2525	𒁹 𒐐𒐋 𒐏 𒌋𒐊 𒐎	1 x 60² + 56 x 60 + 40 x 1 + 15/60 + 9/60²

Numération grecque

La **numération grecque** de l'Antiquité était double : on pouvait écrire les chiffres et les nombres soit au moyen de signes dits « acrophoniques » correspondant à la première lettre de leur nom en grec ancien, soit au moyen de lettres, comme en numération hébraïque ou arabe. On connaît également un système de numération *scientifique*, inspiré des mathématiques babyloniennes. Actuellement, ce sont les chiffres arabes que l'on utilise le plus fréquemment en Grèce.

Dès le Ve siècle av. J.-C., en Attique, région d'Athènes, apparaissent des chiffres dont chaque signe (à l'exception de celui pour 1) n'est autre que la première lettre du nom du nombre, tracée dans l'alphabet local athénien, lequel fut remplacé en -403 par l'alphabet ionien dans lequel certaines lettres ont changé de tracé et/ou de valeur (Voir Histoire de l'alphabet grec).

I pour *1* (ΙΩΤΑ, ιώτα, iota) (comme on dirait *un iota* pour peu),

- 𐅃 pour *5* (ΠΕΝΤΕ, πέντε, *pénte*)1 (comme le penta dans *pentagone* en français),
- *Δ* pour 10 (ΔΕΚΑ, δέκα, *déka*) (comme le déca dans *décathlon*, *décamètre*, ...),
- *H* pour 100 (HEKATON, ἑκατόν, *hekatón*) (comme dans *hectare*),
- *X* pour 1 000 (ΧΙΛΙΟΙ, χίλιοι, *khílioi*) (comme dans *kilogramme*),
- *M* pour 10 000 (ΜΥΡΙΟΙ, μύριοι, *múrioi*) (comme dans *myriade*).

La notation des nombres suivait le principe additif que l'on retrouve dans les chiffres romains. Ainsi, *3* s'exprimait par *III*, *9* par *ΓIIII*, *400* par *HHHH*, etc.

Ce système utilise, outre les lettres courantes de l'alphabet grec, trois lettres archaïques: le *digamma* (tracé le plus souvent comme un *stigma*), le *koppa* (distinct du *koppa* littéral ancien) et le *sampi* (combinaison d'une ancienne lettre sémitique et du *pi*). Purement additive, cette numération ne nécessite pas l'utilisation du zéro, alors inconnu. Le calcul basé sur ces écritures étant impossible, les anciens Grecs utilisaient des jetons placés sur des abaques de bois ou de marbre, divisés en colonnes.

La numération alphabétique est plus récente que la numération acrophonique. Elle a été introduite à Athènes en même temps que l'adoption du modèle ionien de Milet, en −403. Elle est cependant bien plus ancienne car on en trouve déjà des traces à Milet vers −700. On la nomme aussi pour cette raison « numération milésienne » ; l'alphabet de Milet, devenu « classique » grâce à Athènes, n'utilisait pas les trois lettres supplémentaires mentionnées dans l'écriture des mots : leur maintien dans la numération est donc un archaïsme qui s'explique par la nécessité d'avoir à disposition trois fois neuf signes différents.

Chiffre grec	Valeur	Prononciation	Chiffre grec	Valeur	Prononciation
α'	1	alpha	ρ'	100	rô
β'	2	bêta	σ'	200	sigma
γ'	3	gamma	τ'	300	tau
δ'	4	delta	υ'	400	upsilon
ε'	5	epsilon	φ'	500	phi
ϝ'	6	digamma/ stigma	χ'	600	khi
ζ'	7	dzêta	ψ'	700	psi
η'	8	êta	ω'	800	oméga
θ'	9	thêta	ϡ'	900	sampi
ι'	10	iota	͵α	1000	
κ'	20	kappa	͵β	2000	
λ'	30	lambda	͵γ	3000	
μ'	40	mu	͵δ	4000	
ν'	50	nu	͵ε	5000	
ξ'	60	ksi	͵ς	6000	
ο'	70	omicron	͵ζ	7000	
π'	80	pi	͵η	8000	
ϟ'	90	koppa	͵θ	9000	

Numération romaine

La **numération romaine** est un système de numération additive utilisé par les anciens Romains.

Les nombres sont représentés à l'aide de symboles combinés entre eux, notamment par les signes I, V, X, L, C, D et M, appelés **chiffres romains**, qui représentent respectivement les nombres 1, 5, 10, 50, 100, 500 et 1 000. Ces « abréviations destinées à notifier et à retenir les nombres » ne permettaient pas à leurs utilisateurs de faire des calculs, qui étaient effectués au moyen d'abaques.

Un nombre écrit en chiffres romains se lit de gauche à droite. En première approximation, sa valeur se détermine en faisant la somme des valeurs individuelles de chaque symbole, sauf quand l'un des symboles précède un symbole de valeur supérieure ; dans ce cas, on soustrait la valeur du premier symbole au deuxième.

La notation romaine simplifie des notations plus archaïques, voisines de la notation étrusque, en utilisant les lettres de l'alphabet latin les plus ressemblantes aux anciens systèmes unaires (c'est-à-dire à base d'un seul signe, comme l'encoche). Les signes les plus communs sont indiqués dans le tableau suivant :

Chiffre romain	Valeur	Remarques
I	1	Une marque verticale. Signe qui dérive de la pratique ancienne de l'entaille, comme l'ensemble de la numération romaine[7].
V	5	Une marque à laquelle on ajoute une autre marque (d'où des graphies archaïques comme Λ, ⊢, ⋋ ou ⋌, elles-mêmes issues de lettres phéniciennes ou égyptiennes, les deux représentations ou interprétations ayant existé simultanément avant de s'unifier).
X	10	Une marque barrée.
L	50	Un V barré proche de Ѵ à l'origine (c'est-à-dire V et I superposés), aplati en ⊥, puis confondu avec L.
C	100	Un X barré proche de Ж à l'origine (c.-à-d. X et I superposés), écrit ensuite >I< ou ƆIC et abrégé en Ɔ (*apostrophus*) ou C, qui s'est imposé en raison d'une confusion avec le C de *CENTVM*.
D	500	Un ⊢ encadré (c.-à-d. ⊢ et Ɔ superposés) devenu Đ, confondu ensuite avec D. Le signe IƆ signifie aussi 500.
M	1 000	Un X entouré ou encadré qui, passant par plusieurs formes, a été écrit ⊕ ou comme un phi grec Φ, puis est devenu CIƆ et ↀ ; toutes ces formes ont finalement été confondues avec M, d'autant plus que 1 000 se dit *mille* en latin.

de nos jours

La numération décimale « moderne »

décimal \de.si.mal\

1. *(Arithmétique)* Qui va de dix en dix, qui a pour base 10.

La base dix est très ancienne. Elle découle d'un choix naturel, dicté par le nombre des doigts des deux mains. Les Proto-indo-européens comptaient probablement en base dix. Un système de notation décimale a été mis au point :

- au IIIe millénaire av. J.-C., par les Égyptiens (le système égyptien était toutefois un système décimal sans positionnement) ;
- au IIIe millénaire av. J.-C., par les Grecs (d'abord dans les écritures et notations des Minoens, puis des Mycéniens, puis attique) ;
- avant -1350, par les Chinois ;
- vers -650, par les Étrusques ;
- vers -500, par les Indiens en sanskrit.

Avec des chiffres de zéro à neuf

Les systèmes de numération dont les chiffres représentent les unités sont de type positionnel. C'est le cas des numérations arabe non-alphabétique, européenne, de la plupart des numérations indiennes et des numérations mongole et thaï.

En Chine les mesures de capacité et de poids sont décimalisées vers 170 av. J.-C.. Aux États-Unis, le système monétaire est décimal en 1786. En Europe, la décimalisation des unités est initiée en France à partir du 22 août 1790, date à laquelle Louis XVI demande à l'Académie des Sciences de nommer une commission pour définir les poids et mesures. Cette dernière préconise la **division décimale**.

Avantages et inconvénients

La plupart des langues vivantes décomposent les nombres en base dix en raison de certains atouts de celle-ci :

- le comptage sur les dix doigts est très intuitif ;
- son ordre de grandeur est satisfaisant, car il permet de réduire considérablement la longueur d'un grand nombre par rapport à la base 2, tout en conservant des tableaux d'additions et de multiplications mémorisables.

Cependant, il a fallu attendre la généralisation de la notation positionnelle, et l'existence d'un algorithme de division adapté à cette notation pour que les unités de mesure perdent progressivement leurs sous-multiples non décimaux - en particulier, la notation qui comprend 3 du facteur tel que sénaire, duodécimal et octodécimal.

Quand la livre comprenait en France 20 sous de 12 deniers (ou en Grande-Bretagne 20 shillings de 12 pence), les agents économiques appréciaient que cette unité puisse être divisée de manière exacte par 20 diviseurs différents (y compris 1 et 240). En 1971, malgré l'informatique qui permet désormais de gérer facilement l'hétérogénéité de rapports non décimaux entre sous-multiples, la Grande-Bretagne n'a pourtant pas hésité à décimaliser sa monnaie.

Le système décimal

La numération décimale « moderne »

Pour écrire un nombre en base 10 (décimal) il faut :

- 10 chiffres (ou graphismes) : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, c'est une convention. On aurait pu choisir n'importe quelle représentation
- Définir la position des chiffres. Chaque position, en partant de la droite vers la gauche définie une puissance de 10 :

Exemple : **32 768** = 3x10 000 + 2x1 000 + 7x100 + 6x10 + 8x1

Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10 000	1 000	100	10	1
3	**2**	**7**	**6**	**8**

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire exactement avec un nombre fini de chiffres après la virgule (ou un point en notation anglaise) en écriture décimale positionnelle. Les nombres décimaux sont les quotients d'entiers par des puissances de 10 et se présentent ainsi comme des rationnels particuliers.
Les nombres décimaux permettent d'approcher n'importe quel nombre réel et d'effectuer des calculs et comparaisons sur ces valeurs avec des méthodes semblables à celles en usages sur les entiers en numération décimale.

Exemple : **24,537** = $2x10^1 + 4x10^0 + 5x10^{-1} + 3x10^{-2} + 7x10^{-3}$

Rang 1	Rang 0	Rang -1	Rang -2	Rang -3
10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
10	1	0,1	0,01	0,001
2	**4**	**5**	**3**	**7**

un nombre N en base 10 s'écrit donc de la façon suivante:

$$N = A_i \times 10^i + ... + A_4 \times 10^4 + A_3 \times 10^3 + A_2 \times 10^2 + A_1 \times 10^1 + A_0 \times 10^0 + A_{-1} \times 10^{-1} + A_{-2} \times 10^{-2} + A_{-3} \times 10^{-3} + ...$$

avec: $0 \leq A_i \leq 9$

Le binaire

La numération binaire

Pour écrire un nombre en base 2 (binaire) il faut :

2 chiffres (ou graphismes) : 0 1, c'est là aussi une convention. On aurait pu choisir n'importe quelle représentation (des carrés et des ronds …)

Définir la position des chiffres. Chaque position, en partant de la droite vers la gauche définie une puissance de 2 :

Exemple : **1100 0110** = 1x128 + 1x64 + 0x32 + 0x16 + 0x8 +1x4 +1x2 + 0x1 = 198

on notera : $(1100\ 0110)_2 = (198)_{10}$

Rang 7	Rang 6	Rang 5	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

- Un chiffre binaire est appelé un bit (*binary digit*)
- Celui le plus à droite est dit de poids faible ou le moins signifiant
  least significant bit = lsb
- Celui le plus à gauche est dit de poids fort ou le plus signifiant
  Most Significant Bit = MSB
- Un groupe de 8 bits est un octet (*byte*)

Pour un nombre binaire décimal (à virgule) il en est de même

Exemple : **1011**,**0101** = 1x8 + 0x4 + 1x2 + 1x1 + 0x0,5 +1x0,25 + 0x0,125 + 1x0,0625 = 11,3125

on notera : $(1011{,}0101)_2 = (11{,}3125)_{10}$

Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	Rang -1	Rang -2	Rang -3	Rang -4
2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

un nombre N en base 2 s'écrit donc de la façon suivante:

$$N = A_i \times 2^i + ... + A_4 \times 2^4 + A_3 \times 2^3 + A_2 \times 2^2 + A_1 \times 2^1 + A_0 \times 2^0 + A_{-1} \times 2^{-1} + A_{-2} \times 2^{-2} + A_{-3} \times 2^{-3} + ...$$

avec: $A_i = 0$ ou 1

L'octal

La numération octale

Pour écrire un nombre en base 8 (octale) il faut :

8 chiffres : de 0 à 7 , pour représenter les nombres .

Définir la position des chiffres. Chaque position, en partant de la droite vers la gauche définie une puissance de 8 :

Exemple : $(\mathbf{4521})_8 = 4x512 + 5x64 + 2x8 + 1x1 = 2385$

on notera : $(4521)_8 = (2385)_{10}$

Rang 6	Rang 5	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0
8^6	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
262 144	32 768	4 096	512	64	8	1
0	**0**	**0**	**4**	**5**	**2**	**1**

un nombre N en base 8 (octal) s'écrit donc de la façon suivante:

$$N = A_i \times 8^i + \ldots + A_4 \times 8^4 + A_3 \times 8^3 + A_2 \times 8^2 + A_1 \times 8^1 + A_0 \times 8^0 + A_{-1} \times 8^{-1} + A_{-2} \times 8^{-2} + A_{-3} \times 8^{-3} + \ldots$$

avec: $0 \leq A_i \leq 7$

L'hexadécimal

La numération hexadécimale

Le système hexadécimal est un système de numération positionnel en base 16. Il utilise ainsi 16 symboles, en général les chiffres arabes pour les dix premiers chiffres et les lettres A à F pour les six suivants (en majuscule, parfois en minuscule).

Le système hexadécimal est utilisé notamment en électronique numérique et en informatique car il est particulièrement commode et permet un compromis entre le code binaire des machines et une base de numération pratique à utiliser pour les ingénieurs. En effet, chaque chiffre hexadécimal correspond exactement à quatre chiffres binaires (ou bits), rendant les conversions très simples et fournissant une écriture plus compacte. L'hexadécimal a été utilisé la première fois en 1956 par les ingénieurs de l'ordinateur Bendix G-15.

Exemple : $(\mathbf{C7E})_{16} = 12\text{x}256 + 7\text{x}16 + 14\text{x}1 = (3\ 198)_{10}$

on notera : $(C7E)_{16} = (3\ 198)_{10}$

Rang 5	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0
16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
1 048 576	65 536	4 096	256	16	1
0	0	0	**C**	**7**	**E**

un nombre N en base 16 (hexadécimal) s'écrit donc de la façon suivante:

$$N = A_i \text{ x } 16^i + \ldots + A_4 \text{ x } 16^4 + A_3 \text{ x } 16^3 + A_2 \text{ x } 16^2 + A_1 \text{ x } 16^1 + A_0 \text{ x } 16^0 + A_{-1} \text{ x } 16^{-1} + A_{-2} \text{ x } 16^{-2} + A_{-3} \text{ x } 16^{-3} + \ldots$$

avec: $A_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

en général, un nombre N en base b s'écrit:

$$N = a_i \text{ x } b^i + \ldots + a_4 \text{ x } b^4 + a_3 \text{ x } b^3 + a_2 \text{ x } b^2 + a_1 \text{ x } b^1 + a_0 \text{ x } b^0 + a_{-1} \text{ x } b^{-1} + a_{-2} \text{ x } b^{-2} + a_{-3} \text{ x } b^{-3} + \ldots$$

avec: $0 \leq a_i \leq b-1$

Annexe

à savoir
les puissances de 2

2^{40}	1 099 511 627 776	Ti --> tébi	2^{-1}	1/2 =0,5
2^{32}	4 294 967 296	4 Gi	2^{-2}	1/4 =0,25
2^{30}	1 073 741 824	Gi --> gibi	2^{-3}	1/8=0,125
2^{20}	1 048 576	Mi --> mébi	2^{-4}	1/16=0,0625
2^{10}	1 024	Ki --> kibi	2^{-5}	1/32=0,03125
2^{9}	512		2^{-6}	1/64=0,015625
2^{8}	256		2^{-7}	1/128=0,0078125
2^{7}	128		2^{-8}	0,00390625
2^{6}	64		2^{-9}	0,001953125
2^{5}	32		2^{-10}	0,0009765625
2^{4}	16		2^{-11}	0,00048828125
2^{3}	8		2^{-12}	0,000244140625
2^{2}	4		2^{-13}	0,0001220703125
2^{1}	2		2^{-14}	0,00006103515625
2^{0}	1		2^{-15}	0,000030517578125

Tableaux des préfixes binaires et décimaux

Préfixes binaires (préfixes CEI)

Nom	Symbole	2^{10a} = facteur	a
kibi	Ki	2^{10} = 1 024	1
mébi	Mi	2^{20} = 1 048 576	2
gibi	Gi	2^{30} = 1 073 741 824	3
tébi	Ti	2^{40} = 1 099 511 627 776	4
pébi	Pi	2^{50} = 1 125 899 906 842 624	5
exbi	Ei	2^{60} = 1 152 921 504 606 846 976	6
zébi	Zi	2^{70} = 1 180 591 620 717 411 303 424	7
yobi	Yi	2^{80} = 1 208 925 819 614 629 174 706 176	8

Préfixes décimaux (préfixes SI)

Nom	Symbole	10^{3a} = facteur	a
kilo	k	10^{3} = 1 000	1
méga	M	10^{6} = 1 000 000	2
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000	3
téra	T	10^{12} = 1 000 000 000 000	4
péta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000	5
exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000	6
zetta	Z	10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000	7
yotta	Y	10^{24} = 1 000 000 000 000 000 000 000 000	8

Les puissances de 10

10^{n}	$1\,000^{m}$ $m = n/3$	Préfixe français	Symbole	Depuis a	Nombre décimal	Désignation	
						Échelle longue	Échelle courte
10^{24}	$1\,000^{8}$	yotta	Y	1991	1 000 000 000 000 000 000 000 000	Quadrillion	Septillion
10^{21}	$1\,000^{7}$	zetta	Z	1991	1 000 000 000 000 000 000 000	Trilliard	Sextillion
10^{18}	$1\,000^{6}$	exa	E	1975	1 000 000 000 000 000 000	Trillionc	Quintillion
10^{15}	$1\,000^{5}$	péta	P	1975	1 000 000 000 000 000	Billiard	Quadrillion
10^{12}	$1\,000^{4}$	téra	T	1960	1 000 000 000 000	Billionc	Trillion
10^{9}	$1\,000^{3}$	giga	G	1960	1 000 000 000	Milliard	Billion
10^{6}	$1\,000^{2}$	méga	M	1960	1 000 000	Million	
10^{3}	$1\,000^{1}$	kilo	k	1795	1 000	Millier	
10^{2}	$1\,000^{2/3}$	hecto	h	1795	100	Centaine	
10^{1}	$1\,000^{1/3}$	déca	da	1795	10	Dizaine	
10^{0}	$1\,000^{0}$	(aucun)	—	—	1	Unité	
10^{-1}	$1\,000^{-1/3}$	déci	d	1795	0,1	Dixième	
10^{-2}	$1\,000^{-2/3}$	centi	c	1795	0,01	Centième	
10^{-3}	$1\,000^{-1}$	milli	m	1795	0,001	Millième	
10^{-6}	$1\,000^{-2}$	micro	µ	1960	0,000001	Millionième	
10^{-9}	$1\,000^{-3}$	nano	n	1960	0,000 000 001	Milliardième	Billionième
10^{-12}	$1\,000^{-4}$	pico	p	1960	0,000 000 000 001	Billionième	Trillionième
10^{-15}	$1\,000^{-5}$	femto	f	1964	0,000 000 000 000 001	Billiardième	Quadrillionième
10^{-18}	$1\,000^{-6}$	atto	a	1964	0,000 000 000 000 000 001	Trillionième	Quintillionième
10^{-21}	$1\,000^{-7}$	zepto	z	1991	0,000 000 000 000 000 000 001	Trilliardième	Sextillionième
10^{-24}	$1\,000^{-8}$	yocto	y	1991	0,000 000 000 000 000 000 000 001	Quadrillionième	Septillionième

La Numeration.odt
mardi 17 janvier 2023 à 12:43:42
by blewando.elec@gmail.com