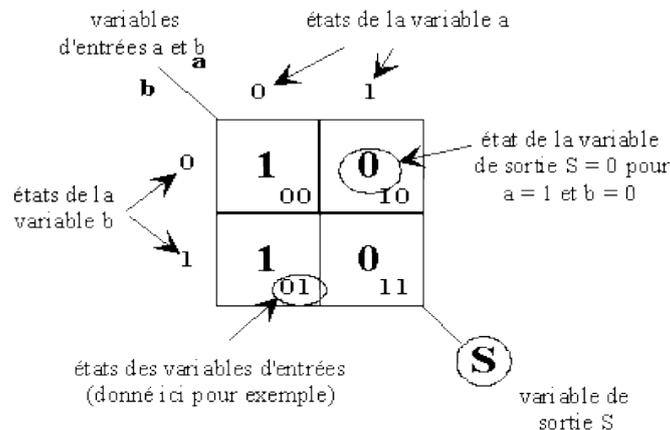


## Tableaux de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh est un tableau représentatif du comportement d'une variable. Ce tableau a pour but de simplifier l'écriture de l'équation de fonctionnement. Il est utilisé principalement en logique combinatoire. Dans ce tableau chaque case correspond à une combinaison d'entrées de la variable. Dans chaque case on reporte l'état de la variable [0,1].

Exemple:



La variable de sortie  $S$  est active dans deux cas. Les deux combinaisons de sortie sont respectivement pour  $a$  et  $b$ , [0,0] ou [0,1]. L'utilisation du tableau de Karnaugh permet de déterminer très rapidement l'équation de la variable  $S$ .

Il faut rechercher les variables qui n'influencent pas le comportement de la variable de sortie. Dans notre exemple les 1 sont dans une colonne, le résultat va donc dépendre directement de la variable associée à cette colonne, ici " $a$ ". La variable de ligne n'a pas d'influence car quel que soit l'état de  $b$  (0 ou 1), la variable de sortie reste à 1. L'équation de sortie sera donc  $S \equiv a$ .

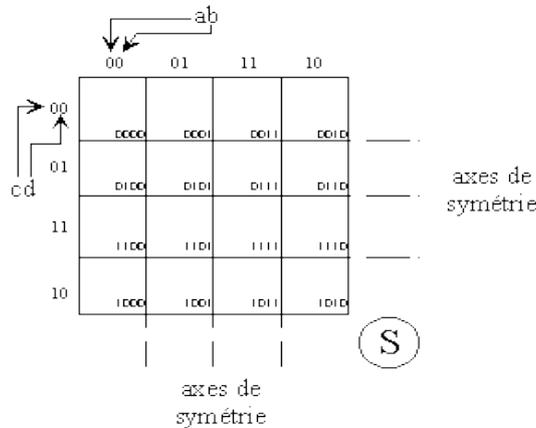
Lorsqu'un système présente 4 variables d'entrée le principe est le même.

Il faut remarquer la construction de ce tableau. Sur l'exemple suivant, on remarque :

- que le code utilisé est le code binaire réfléchi, ceci est très important dans la mesure où l'on souhaite voir évoluer le comportement d'une sortie en fonction de plusieurs variables,
- qu'à chaque case correspond une équation de fonctionnement particulière,
- que ce tableau possède des axes de symétrie horizontaux et verticaux,
- et qu'enfin les colonnes ou les lignes extrêmes de ce tableau peuvent être virtuellement déplacées pour être mise côte à côte pour faciliter les regroupements dans la mesure ou une seule variable évolue d'une case à l'autre.

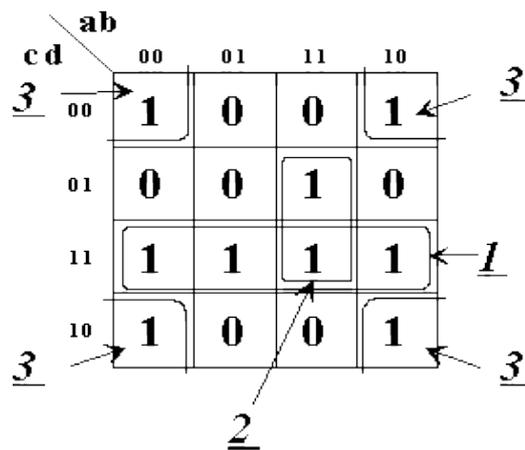
Exemple :

pour passer de la première colonne du tableau  $[b,a] \equiv [0,0]$  à la dernière colonne  $[b,a] \equiv [1,0]$  seule la variable "a" a évolué.



Ce tableau doit être complété par l'état de la sortie à analyser. Une fois terminé on procédera par regroupement des cases indiquant des états identiques par rapport aux axes de symétrie.

Exemple :



Dans l'exemple ci-dessus trois groupements sont possibles. Chacun d'entre eux va donner une partie de l'équation de fonctionnement de "S". Le groupement 1 se fait sur une ligne donc indépendamment de "a" ou de "b" puisque ces deux variables changent d'état successivement. L'équation de ce groupement est : "c.d". Le groupement 2 se fait sur une colonne et deux lignes l'équation va dépendre de "a, b, d" et pas de "c" puisque "c" change d'état entre les deux lignes sans influencer sur la sortie.

L'équation de ce groupement est : "a.b.d".

Le groupement 3 se fait sur deux lignes et deux colonnes, ici ce cas est particulier puisque les cases ne sont pas contiguës, mais il est possible. L'équation va dépendre des variables "b, d" et non des variables a, c puisque ces variables changent d'état. L'équation de ce groupement est : "b.d".

L'équation de fonctionnement de S devient :

$$S = c.d + a.b.d + \bar{b}.\bar{d}$$

On constate, pour un tableau de 16 cases, qu'un regroupement de 2 cases donne un élément d'équation à 3 variables, qu'un regroupement de 4 cases donne un élément d'équation à 2 variables.

On peut en conclure qu'un regroupement d'une seule case donnera un élément d'équation à 4 variables qu'un regroupement de 8 cases donnera un élément d'équation à 1 variable, qu'un regroupement de 16 cases donnera une équation de fonctionnement toujours vraie.

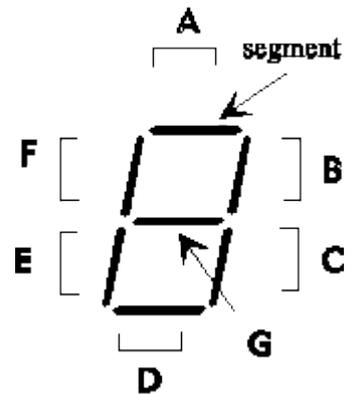
## Exercice

**Présentation :**

On vous propose de réaliser les équations de fonctionnement d'un afficheur 7 segments. Cet afficheur peut afficher les chiffres de 0 à 9.

L'étude dans un premier temps consistera à rechercher les équations de fonctionnement de l'afficheur pour les quatre premiers chiffres de 0 à 3. Dans un deuxième temps vous devrez rechercher les équations de fonctionnement de l'afficheur pour les 10 chiffres de 0 à 9.

Les variables suivront l'évolution du binnaire pur.

**Partie 1**

**Question N°1:** Combien de variables seront nécessaires pour décrire les quatre premiers chiffres. ( de 0 à 3 )

**Question N°2:** Définir à l'aide de 7 tableaux de Karnaugh (un par segment) le fonctionnement de l'afficheur.

**Partie 2**

**Question N°1:** Combien de variables seront nécessaires pour décrire le fonctionnement de tous les chiffres.

**Question N°2:** Définir à l'aide de 7 tableaux de Karnaugh (un par segment) le fonctionnement de l'afficheur.

**Question N°3:** Réaliser le schéma électrique de l'équation du segment A (SA).

**Question N°4:** Réaliser le schéma électrique de l'équation du segment B (SB).

**Question N°5:** Réaliser le schéma électrique de l'équation du segment C (SC).

**Remarque :** Les cases des tableaux de Karnaugh qui sont vides pour la description du fonctionnement seront utilisées pour faciliter les regroupements et donc les équations.

PARTIE 1

Il faut deux variables d'entrées b et a pour réaliser ce dispositif

Table de vérité

b	a	SA	SB	SC	SD	SE	SF	SG
0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1

Tableaux de Karnaugh

. b \ a	0	1
0		
1		

SA =

. b \ a	0	1
0		
1		

SB =

. b \ a	0	1
0		
1		

SC =

. b \ a	0	1
0		
1		

SD =

. b \ a	0	1
0		
1		

SE =

. b \ a	0	1
0		
1		

SF =

. b \ a	0	1
0		
1		

SG =

. b \ a	0	1
0	1	0
1	1	1

SA = b + a/

. b \ a	0	1
0	1	1
1	1	1

SB = 1

. b \ a	0	1
0	1	1
1	0	1

SC = a + b/

. b \ a	0	1
0	1	0
1	1	1

SD = SA

. b \ a	0	1
0	1	0
1	1	0

SE = a/

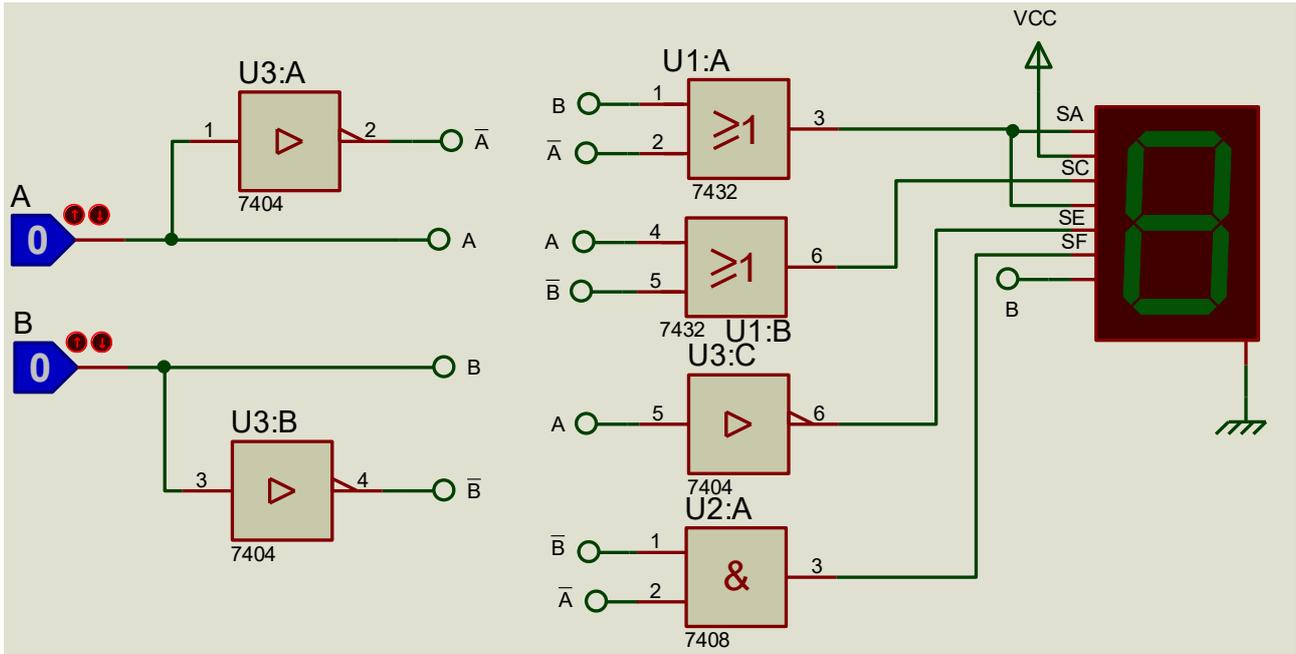
. b \ a	0	1
0	1	0
1	0	0

SF = a/ . b/

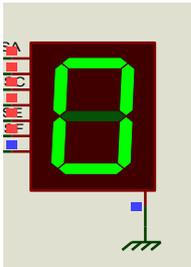
. b \ a	0	1
0	0	0
1	1	1

SG = b

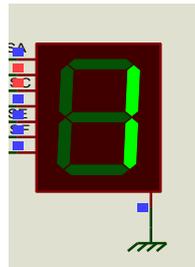
Schéma structurel



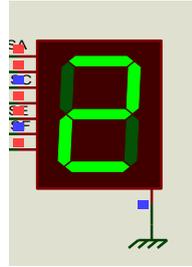
B=0 ; A=0



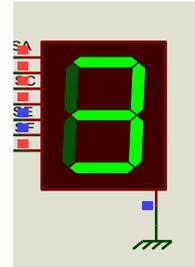
B=0 ; A=1



B=1 ; A=0



B=1 ; A=1



## PARTIE 2

Il faut quatre variables d'entrées d, c, b et a pour réaliser ce dispositif

Table de vérité

d	c	b	a	SA	SB	SC	SD	SE	SF	SG	Affichage
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	2
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	3
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	4
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	5
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	6
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	8
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	9

Recherche des équations des fonctions SA, SB, ... .. , SF et SG

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SA =

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SB =

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SC =

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SD =

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SE =

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SF =

. dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

SG =

Corrigé

Recherche des équations des fonctions SA, SB, ... .. , SF et SG

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11				
10	1	1		

SA =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11				
10	1	1		

SB =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	1
11				
10	1	1		

SC =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11				
10	1	1		

SD =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11				
10	1	0		

SE =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	1
11				
10	1	1		

SF =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	1
11				
10	1	1		

SG =

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11				
10	1	1		

SA =

$$\overline{SA} = c.\overline{b}.\overline{a} + \overline{d}.\overline{c}.\overline{b}.a$$

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11				
10	1	1		

$$SB = ((c.b/.a) + (c.b.a)/)$$

$$SB = \overline{c.(a \oplus b)}$$

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	1
11				
10	1	1		

SC =

$$\overline{SC} = \overline{c}.b.\overline{a}$$

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11				
10	1	1		

SD =

$$\overline{SD} = c.\overline{b}.\overline{a} + c.b.a + \overline{d}.\overline{c}.\overline{b}.a$$

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11				
10	1	0		

SE =

$$SE = (\overline{c} . \overline{a}) + (b . \overline{a}) = \overline{a} . (\overline{c} + b)$$

. dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	1
11				
10	1	1		

SF =

$$SF = d + c.\overline{a} + c.\overline{b} + \overline{b}.\overline{a}$$

. dc \ ba	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	1
11				
10	1	1		

**SG =**

$$SG = d + c.\bar{b} + \bar{c}.b + b.\bar{a}$$

Synthèse :

$$\overline{SA} = c.\bar{b}.\bar{a} + \bar{d}.\bar{c}.\bar{b}.a$$

$$SB = \overline{c . (a \oplus b)}$$

$$\overline{SC} = \bar{c}.b.\bar{a} + \bar{d}.\bar{c}.\bar{b}.a$$

$$\overline{SD} = c.\bar{b}.\bar{a} + c.b.a + \bar{d}.\bar{c}.\bar{b}.a$$

$$SE = (\bar{c} . \bar{a}) + (b . \bar{a})$$

$$SF = d + c.\bar{a} + \bar{b}.\bar{a}$$

$$SG = d + c.\bar{b} + \bar{c}.b$$

